Superman doit parcourir un chemin rectiligne $[AB]$ à vitesse constante. Une pluie de Kryptonite, la seule substance que redoute Superman déferle sur ce chemin. Que doit faire Superman pour recevoir le moins de gouttes possibles ? Le calcul précédent, non-relativiste, incite à penser que Superman doit aller aussi vite que possible. Cependant, on sait que Superman peut atteindre des vitesses proches de celles de la lumière. Cela change-t-il le résultat ? Une première approche montre que non : dans le référentiel immobile par rapport au chemin $[AB]$, Superman subit une contraction de Lorentz qui réduit d'autant sa longueur L. Cet effet diminue le nombre de gouttes reçues à mesure que la vitesse augmente. Le reste de l'analyse est semblable à l'analyse classique. Il est donc encore plus intéressant pour Superman d'augmenter sa vitesse. Quantitativement, on obtient :

$$N = \rho l d(h + \frac{v_p}{v_S} L\sqrt{1 - v_S^2/c^2})$$

où l'on a noté v_S la vitesse de Superman dans le référentiel R lié au chemin, et v_p la vitesse de la pluie dans R (pluie supposée verticale). On voit que la seule différence avec la formule classique est que la longueur L a été multipliée par le facteur de contraction de Lorentz.

Il est très instructif de faire ce calcul dans le référentiel R' lié à Superman. Notons avec des primes les quantités calculées dans ce référentiel. Supposons que Superman passe en A à l'instant 0 dans les deux référentiels, que A soit l'origine des coordonnées dans R et que le centre de gravité S de Superman soit l'origine des coordonnées dans R'. Alors, à $t = 0$, $x_S = 0$ et à $t' = 0$, $x'_A = 0$. Pour passer de R à R', on doit appliquer la transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{v_S x}{c^2}) \\ x' &= \gamma(x - v_S t) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1}$$

où $\gamma = (1 - v_S^2/c^2)^{-1/2}$. Il est plus simple d'utiliser la notation matricielle :

$$X' = \Lambda X$$

avec $X' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v_S}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v_s}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, pour une goutte de pluie qui suit l'équation horaire : $y_g(t) = h - v_p t$ dans R, soit :

$$X_g = \begin{pmatrix} ct \\ x_g \\ h - v_p t \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a dans R :

$$V_g := \frac{dX_g}{dt} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -v_p \\ 0 \end{pmatrix}$$

et dans R' :

$$V'_g := \frac{dX'_g}{dt'} = \frac{d(\Lambda X_g)}{dt}\frac{dt}{dt'} = \Lambda V_g \times \gamma$$

où l'on a utilisé (1). On obtient :

$$V'_g = \begin{pmatrix} c \\ -v_S \\ -\frac{v_p}{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où le vecteur-vitesse $\overrightarrow{v'_g} = \begin{pmatrix} -v_S \\ -\frac{v_p}{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix}$ des gouttes de pluie dans R'.

Attention, la méthode que nous venons d'utiliser n'est pas très "relativiste" dans la mesure où V_g et V'_g ne sont pas des quadrivecteurs : en effet ils ne se transforment pas par une transformation de Lorentz (ce qui est d'ailleurs apparent dans nos calculs). Ce qu'on appelle en relativité le quadrivecteur-vitesse est la dérivée de la 4-position par rapport au temps propre. Il est Lorentz-unitaire et se transforme de Lorentz. Pour obtenir la vitesse des gouttes de pluies dans R', on aurait aussi pu utiliser la formule relativiste d'addition des vitesses. Nous laissons le lecteur vérifier qu'on obtient bien la même chose.

Il est essentiel de ne pas commetre l'erreur de considérer la pluie ayant la même densité dans R' et dans R ! Ce n'est pas le cas car l'écart entre les gouttes subi une contraction de Lorentz dans le sens horizontal : la pluie est donc toujours uniforme mais sa densité augmente d'un facteur γ : $\rho' = \gamma\rho$. On peut alors faire le même calcul que dans le cas classique pour "compter les gouttes" reçues par unité de temps à condition de remplacer : v_0 par $\frac{v_p}{\gamma}$, v par v_S, et ρ par $\gamma\rho$. On obtient :

$$\frac{dN}{dt'} = l\rho\gamma(L\frac{v_p}{\gamma} + hv_S) = l\rho(Lv_p + \gamma hv_S)$$

On n'est pas obligé d'aimer cette méthode un peu "à la main" et préférer quelque chose de plus général. Voici la bonne façon de faire : on associe à la pluie un quadrivecteur courant-densité, J, qui prend la forme suivante $J = (c\rho, \overrightarrow{j})$, où $\overrightarrow{j}$ est le flux de gouttes. Pour obtenir le nombre de gouttes traversant une surface (plane, sinon il faut intégrer), on fait le produit scalaire : $\overrightarrow{j}.\overrightarrow{S}$ où $\overrightarrow{S}$ est le vecteur normal à la surface multiplié par son aire. Ici on a :

$$J = \begin{pmatrix} \rho c \\ 0 \\ -\rho v_p \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme J est un quadrivecteur, il se transforme de Lorentz, on a donc :

$$J' = \Lambda J = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v_S}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v_s}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho c \\ 0 \\ -\rho v_p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\rho c \\ -\gamma\rho v_S \\ -\rho v_p \\ 0 \end{pmatrix}$$

On voit que la densité est bien multipliée par γ. Le flux $\overrightarrow{j}'$ est donc $\begin{pmatrix} -\gamma\rho v_S \\ -\rho v_p \\ 0 \end{pmatrix}$. Il y a un flux de goutte à travers la tête T et la face avant A de Superman, dont les vecteurs surface sont respectivement : $\overrightarrow{S_T} = \begin{pmatrix} 0 \\ Ll \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{S_A} = \begin{pmatrix} hl \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc le nombre de gouttes de Kryptonite touchant Superman par unité de temps est :

$$\frac{dN}{dt'} = |\overrightarrow{j}'.\overrightarrow{S_T}| + |\overrightarrow{j}'.\overrightarrow{S_A}| = l\rho(Lv_p + \gamma h v_s)$$

On retrouve la formule vue plus haut.

Il s'agit maintenant de calculer le temps mis par Superman pour sortir de la pluie, c'est-à-dire pour atteindre le point B. Ce temps de parcours est bien sûr $T = d/v_S$ dans R. Pour trouver T' on peut appliquer directement la formule de "dilatation" (c'est dans l'autre sens qu'il y a dilatation) des durées :

$$T' = T\sqrt{1 - \frac{v_S^2}{c^2}}$$

Ou bien appliquer une transformation de Lorentz : l'évènement "Superman est en B" a pour coordonnées spatio-temporelles dans R :

$$X_{S=B} = \begin{pmatrix} cT \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et dans R' :

$$X'_{S=B} = \begin{pmatrix} cT' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(par définition, S est l'origine spatiale, pour tout temps. Donc "S est en B" se comprend plutôt "B est en S" dans R'.)
On sait que $X'_{S=B} = \Lambda X_{S=B}$ et le calcul donne :

$$X'_{S=B} == \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v_S}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v_s}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c(T - dv_S/c^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

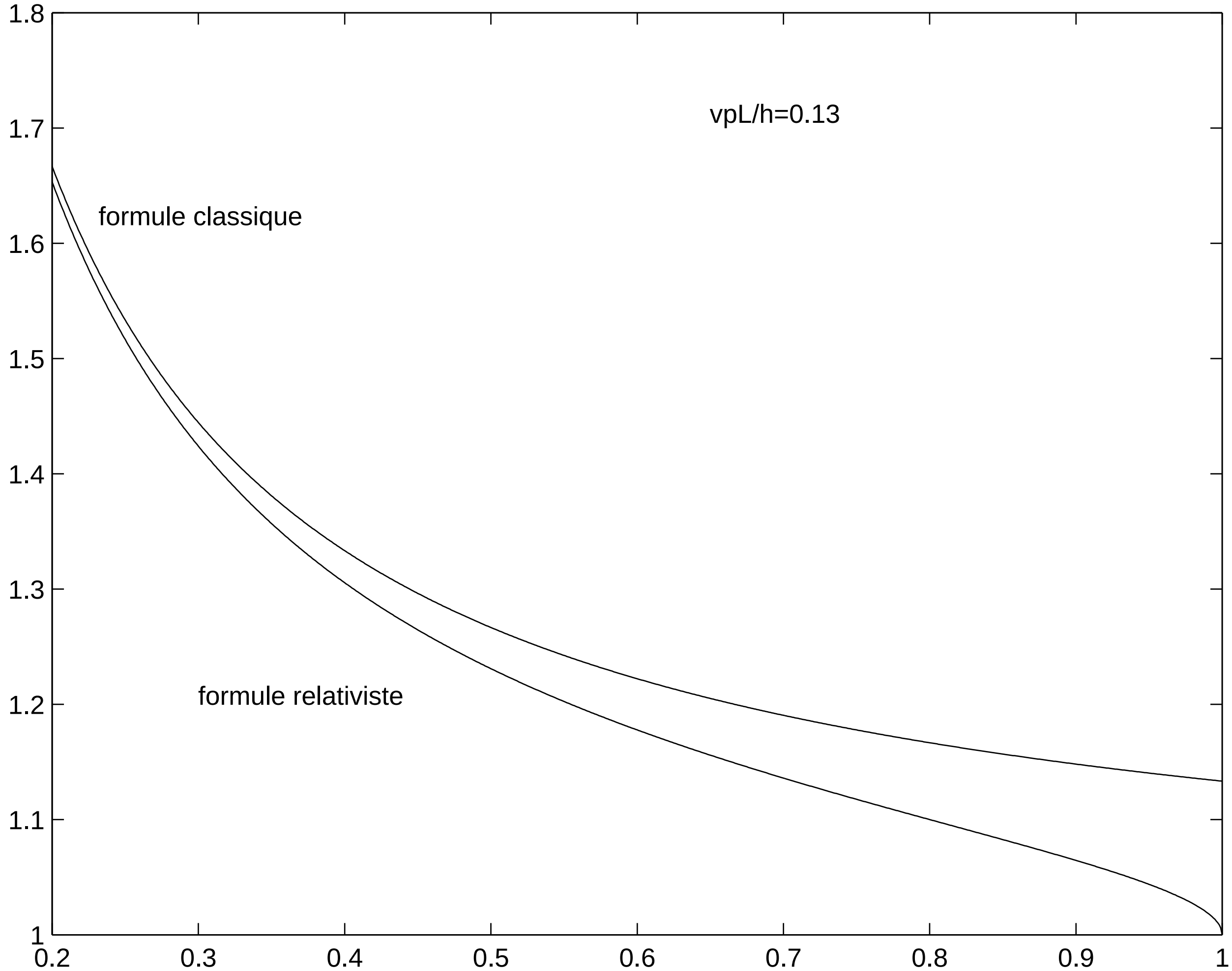
En identifiant les premières composantes et en utilisant la définition de γ, on retrouve bien la formule annoncée.

Le nombre de gouttes de Kryptonite reçues par Superman est donc

$$N = l\rho T\sqrt{1 - v_S^2/c^2}(Lv_p + \frac{hv_S}{\sqrt{1 - v_S^2/c^2}})$$

D'où, en utilisant $T = d/v_S$:

$$\boxed{N = \rho l d(h + \frac{v_p}{v_S}L\sqrt{1 - v_S^2/c^2})}$$



La différence avec la formule classique apparaît pour les vitesses proches de c, comme il est naturel. On le voit bien sur les courbes ci-dessus. La courbe relativiste admet une tangente verticale en $v = c$.