Un bref aperçu de l'évolution des mathématiques à travers l'exemple des nombres complexes

1 Des mathématiques intuitives aux mathématiques rigoureuses

L'une des difficultés majeures que rencontrent les élèves passant de l'enseignement secondaire à la première année du supérieur est leur rencontre avec des mathématiques plus formelles, certains diront plus abstraites, et plus rigoureuses. Le but de ce chapitre introductif est de montrer que ce passage correspond assez précisément à un changement de perspective sur les mathématiques ayant eu lieu au XIX^e^ siècle, et qui, loin d'être une volonté perverse des praticiens de cette discipline, était rendu nécessaire par la recherche de solutions précises à des problèmes légués par leur prédécesseurs. En retour, ce changement de perspective a permis des applications et des découvertes si importantes que la solution des anciens problèmes fait aujourd'hui figure d'anecdote.
Nous donnons ci-dessous un bref aperçu de cette évolution à travers l'exemple des nombres complexes.

2 La découverte des nombres complexes

Historiquement, les nombres complexes sont apparus au XVI^e^ siècle en liaison avec la résolution des équations de degré 3 par la méthode dite de Cardan. On veut résoudre l'équation suivante :

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

Exercice 2.1 ☕ Montrer que toute équation de degré trois $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$ peut se ramener à une équation du type (1) en posant $X = x + \alpha$, pour α bien choisi.

Si on pose $x = u + v$ dans (1) on obtient :

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0 \tag{2}$$

Comme u et v ne sont pas complétement déterminés on peut envisager de poser une autre condition. Comme leur somme est connue, on peut se donner leur produit.

Exercice 2.2 ☕ Montrer que quels que soient S et P réels, il existe toujours deux complexes z et z' tels que $z + z' = S$ et $zz' = P$, uniques à l'ordre près et solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

On pose donc $uv = -p/3$ de façon à simplifier l'équation (2). Notons que Cardan ne connaît pas les nombres complexes. Il ne se pose pas la question de savoir si les conditions $u + v = x$ et $uv = -p/3$ ont bien un sens. Seul compte pour lui le résultat final. Un élève qui rendrait une telle copie aujourd'hui se verrait infliger un sérieux rappel à la rigueur par son professeur !
Avec ces conditions on obtient donc $u^3 + v^3 + q = 0$. Par ailleurs on a $u^3v^3 = -p^3/27$. D'où :

$$u^3 + v^3 = -q \text{ et } u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

On connaît la somme et le produit des cubes de u et v, on va donc pouvoir déterminer ces cubes en résolvant l'équation :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{3}$$

Son discriminant est $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$. Dans le cas où $\Delta > 0$ on trouve deux solutions réelles dont on extrait les racines cubiques, et on trouve ainsi u et v réels. On trouve alors $x = u + v$, solution réelle à l'équation de départ.

Exercice 2.3 ☕☕ Montrer que si $\Delta > 0$ alors l'équation (1) a une seule solution réelle.

Si $\Delta < 0$, il se produit quelque chose de très intéressant. L'équation (3) n'a pas de solution réelle. Néanmoins si on est audacieux, on peut écrire des solutions sous la forme $\frac{-q\pm\sqrt{\Delta}}{2}$. On peut alors trouver des « racines cubiques » à ces solutions, et en les sommant, retrouver trois solutions réelles pour l'équation (1). Voyons cela sur un exemple. Considérons l'équation :

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

On est facilement conduit à :

$$X^2 + X + 1 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = -3$. Si on est prêt à écrire $\sqrt{-3}$ comme les algébristes italiens de la Renaissance, on trouve les solutions sous la forme $X = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$. Il faut maintenant trouver une racine cubique à chacun de ces deux nombres. Pour simplifier nous allons utiliser nos connaissances sur les nombres complexes, en disant que nous reconnaissons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et son conjugué. L'équation $u^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ a pour solutions $u_k = e^{\frac{2i\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}}$, avec $k \in \{0;1;2\}$, soit encore r, rj et $r\bar{j}$ en posant $r = e^{\frac{2i\pi}{9}}$. On sait que $v = \bar{u}$, ainsi on a :

$$\begin{aligned}
u+v &= r+\bar{r} = 2\cos(\frac{2\pi}{9}) \\
\text{ou } u+v &= rj+\bar{r}\bar{j} = 2\cos(\frac{8\pi}{9}) \\
\text{ou } u+v &= r\bar{j}+\bar{r}j = 2\cos(\frac{4\pi}{9})
\end{aligned}$$

On trouve trois solutions réelles[1].

Exercice 2.4 Montrer que si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$ il y a toujours trois solutions réelles.

Pour exprimer les solutions on a donc utilisé un nombre imaginaire : $\sqrt{-3}$. Ce nombre est vu comme un artifice de calcul, qui doit disparaître dans l'expression finale. On peut légitimement douter de la validité d'une telle méthode. Néanmoins, la manipulation des nombres imaginaires et de ceux qui sont composés d'un réel et d'un imaginaire (nommés complexes) sous la forme $z = a + b\sqrt{-1}$ s'est répandue. La notation $\sqrt{-1}$ a finalement été remplacée par i, l'initiale d'imaginaire, puisque l'écriture sous forme d'un radical entraîne rapidemment des contradictions. Par exemple :

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}^2 = -1$$

En revanche, la manipulation des nombres écrits sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels ne pose pas ce genre de problème. De plus, l'utilisation de ces nombres en analyse, notamment par Euler, a permis la démonstration de théorèmes fondamentaux. Au XVIIIe siècle il n'était plus question pour les mathématiciens de se passer des nombres complexes. Leur utilité tenait lieu de justification à leur existence.

Il est encore possible aujourd'hui d'introduire les nombres complexes de cette façon. Ce sera notre première définition. Notons que cette définition suppose déjà définis les nombres réels et les opérations d'addition et de multiplication des réels.

Définition 2.1 *On considère des objets appelés nombres complexes, incluant les nombres réels, un objet i n'appartenant pas à $\mathbb{R}$, et tous ceux qu'on peut obtenir par addition et multiplication. L'addition et la multiplication prolongent celles de $\mathbb{R}$ et vérifient les règles suivantes : associativité et commutativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication sur l'addition. Le réel 0 est neutre pour $+$ et 1 est neutre pour $\times$. À toutes ces règles on ajoute $i^2 = -1$.*

1. Il est ici aisé d'apparier les bonnes racines cubiques entre elles, et de choisir parmi les neuf couples possibles du type $(u_i; v_j)$, les trois seuls qui donnent des solutions, en utilisant le fait que celles-ci sont réelles. Dans le cas général on utilise le fait que $uv = -p/3$.

Une telle définition est dite axiomatique : on énonce un certain nombre de règles qu'on nomme des axiomes. De tels axiomes pour la géométrie ont été énoncés par Euclide. En voici quelques uns[2] :

> **A1** : Soient A et B deux points distincts. Alors il existe une et une seule droite passant par A et B.
>
> **A2** : Toute droite contient au moins deux points distincts.
>
> **E** : Soit d une droite et P un point n'appartenant pas à d. Alors il existe une et une seule droite d' passant par P et parallèle à d.

En comparant les axiomes des nombres complexes et ceux d'Euclide on constate une différence. Les premiers semblent parfaitement arbitraires, tandis que les seconds semblent énoncer des propriétés que chacun peut reconnaître comme évidentes. Creusons un peu. Si les seconds nous semblent évidents, c'est que nous nous référons à des notions de droite et de points déjà familières, et en effet, Euclide pose des définitions : par exemple le point est défini comme ce qui n'a aucune étendue. Un instant de réflexion montre qu'une telle définition n'a aucune utilité pratique, à moins de définir préalablement ce qu'est l'étendue, ce qu'Euclide ne fait pas. Néanmoins, même si personne n'a jamais vu de point mathématique, et si la définition d'Euclide est passablement oiseuse, elle permet de construire une représentation mentale de l'objet dont on parle. C'est toujours ainsi qu'on introduit la géométrie aux collège[3]. Bref, tout cela repose sur l'intuition, qui, de son côté, provient de l'abstraction de propriétés d'objets réels, comme les segments de droites tracés à la règle sur du papier.

Il en va de même pour les nombres réels : une fois la notion de droite acquise, il est aisé de reconnaître que tout segment doit posséder une longueur, et que cette longueur est un nombre « réel », au sens où ce nombre existe réellement. La racine carrée de 2, par exemple, est un tel nombre, puisqu'il s'agit de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. D'une façon générale, on peut démontrer les propriétés des nombres réels à l'aide de la géométrie euclidienne.

La notion de nombre complexe pose un problème car elle n'est ni abstraite directement de l'observation d'objets quotidiens ni ne provient de la géométrie. Son origine est algébrique. C'est la raison pour laquelle un nombre tel que i fut nommé imaginaire et considéré comme tel jusqu'à la fin du XVIIIe siècle. Puis vint l'invention du plan complexe par Argand. Cette interprétation géométrique a soulagé tout le monde : la géométrie étant vue à la fois comme la reine et le fondement des mathématiques, si un concept s'y rattachait il était ispo facto intégré au royaume des mathématiques.

3 Quand rien ne va plus en géométrie...

Le grand chambardement en mathématiques a pour origine la tentative de démontrer le cinquième postulat d'Euclide (l'axiome E vu plus haut) à partir des autres axiomes de la géométrie. Comme beaucoup d'autres mathématiciens avant lui, Lobatchevsky tenta de démontrer cet axiome par l'absurde. On peut démontrer assez facilement qu'il existe une parallèle à d, la question délicate est celle de l'unicité. S'il y en a plus d'une alors on peut montrer qu'il y en a nécessairement une infinité. Ceci paraît absurde, néanmoins cela ne rentre pas en contradiction avec les autres axiomes. Beaucoup de mathématiciens avant Lobatchevsky avaient fini par obtenir des résultats qui heurtaient tellement le bon sens qu'ils pensaient avoir trouvé une absurdité et ainsi démontré le cinquième postulat. Néanmoins il s'est toujours trouvé d'autres mathématiciens pour examiner leurs preuves de plus près et constater qu'il n'y avait pas à proprement parler de contradiction. Le mérite de Lobatchevsky est d'avoir poussé très loin de tels raisonnements paradoxaux. Il comprit qu'aucune véritable contradiction n'apparaîtrait, et qu'à côté de la géométrie habituelle, dite euclidienne, il en existait une autre, semblant venir d'un autre monde, ne pouvant être visualisée, mais sans contradiction interne. Notons que l'on ne peut pas vraiment montrer que cette géométrie ne contient aucune contradiction. Ce qu'on peut montrer, c'est que si une contradiction existait en géométrie non euclidienne, alors il en existerait également une en géométrie euclidienne. À cet

2. La dénomination des axiomes n'est pas celle d'Euclide, mais de David Hilbert, qui compléta le système du mathématicien grec au XXe siècle. Dans la terminologie d'Euclide, l'axiome E était nommé « cinquième postulat ».

3. Pour quelques mois encore peut-être...

effet on peut utiliser le demi-plan de Poincaré. On considère un demi-plan ouvert H d'un plan euclidien P. On note D la droite frontière de H. On convient d'appeler ≪ droites non euclidiennes ≫ toutes les demi-droites ouvertes contenues dans H et perpendiculaires à D et tous les demi-cercles ouverts contenus dans H et centrés sur D. Deux droites non euclidiennes sont déclarées parallèles si elles n'ont pas de point commun.

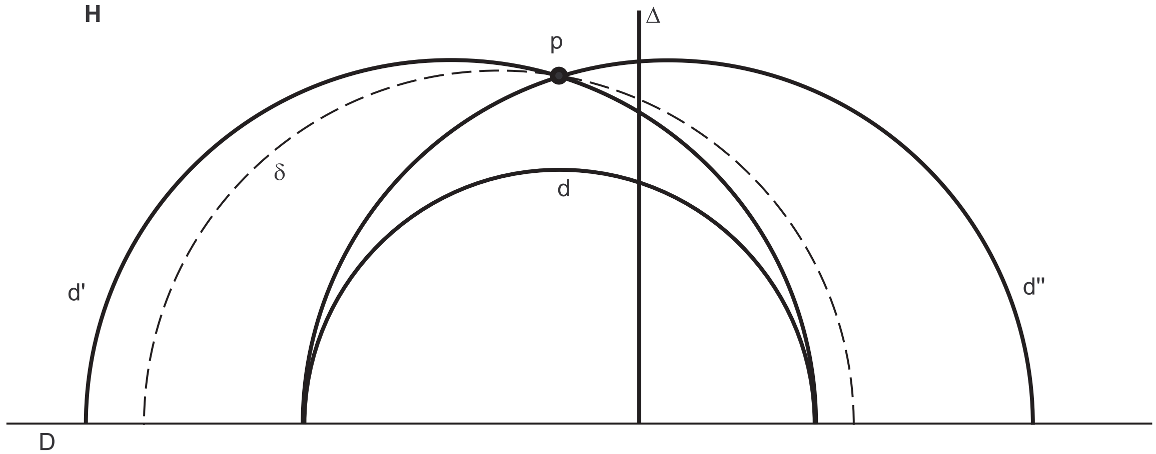

FIGURE 1 – La droite non euclidienne d est sécante à Δ et parallèle à δ. Les droites d' et d'' sont des parallèles limites à d dans le sens où toutes les autres parallèles à d passant par P, comme δ, sont incluses dans la portion de plan qu'elles délimitent.

On peut constater sur la figure ci-dessus l'existence d'une infinité de droites non euclidiennes parallèles à d et passant par le point P, en contradiction avec le cinquième postulat d'Euclide. Néanmoins, on peut prouver, à l'aide des théorèmes de géométrie euclidienne, que tous les autres axiomes sont valides pour les droites non euclidiennes et les points de H. On a ainsi réussi, en quelque sorte, à plonger la géométrie de Lobatchevky dans celle d'Euclide [4]. Il n'y a donc pas de raison, sur le plan purement mathématique, de privilégier l'une par rapport à l'autre. Les deux ont le droit de cité.
Cet épisode changea la donne. En effet, les mathématiciens réalisèrent que les définitions comme celles qu'Euclide donnait du point n'étaient en réalité d'aucun secours. Seule compte la cohérence (i.e. l'absence de contradiction) d'une théorie. Pour s'assurer qu'une théorie est cohérente, on en donne un modèle. Par exemple la représentation de Poincaré que nous avons évoquée plus haut est un modèle de la géométrie non euclidienne. Le plan complexe d'Argand est un modèle de la théorie des nombres complexes.

4 Isomorphismes

Cependant il est parfaitement possible d'exhiber plusieurs modèles d'une même théorie. Dans le cours, nous choisissons le modèle d'Argand comme définition des nombres complexes. Nous appelons $\mathbb{C}$ l'ensemble des couples de réels muni de certaines lois d'addition et de multiplication. Mais voici par exemple un autre modèle de la théorie des nombres complexes. On considère des tableaux 2×2 de nombres réels comme par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Un tel tableau s'appelle une matrice. On définit l'addition des matrices composante par composante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

4. Il est également possible de faire l'inverse.

On définit également la multiplication de deux matrices de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

On peut montrer que l'addition des matrices est commutative et associative, que la multiplication est associative, et qu'elle est distributive sur l'addition.
On définit enfin la multiplication d'une matrice par un nombre réel :

$$\lambda . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels, et notons C leur ensemble. On peut constater que si l'on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors pour tout $Z \in C$ il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tel que $Z = a.U + b.J$. De plus, on a :

$$Z + Z' = (a + a').U + (b + b').J$$

pour tout réel λ :

$$\lambda.Z = \lambda a.U + \lambda b.J$$

et enfin

$$ZZ' = (aa' - bb').U + (ab' + b'a).J$$

En particulier on a $J^2 = -U$. Oublions un instant que Z et Z' désignent des matrices et concentrons-nous sur les lois d'addition et de multiplication. Nous voyons qu'elles ont exactement les mêmes propriétés que celles que nous avons définies sur $\mathbb{C}$. Il suffirait de noter $U = 1$ et $J = i$ pour ne plus percevoir la moindre différence. Nous venons de construire un autre modèle des nombres complexes. Ces deux modèles sont *isomorphes*. Cela signifie que le passage de l'un à l'autre est un simple changement de notation, du moins vis-à-vis d'une certaine structure que l'on considère.
Dans notre exemple l'isomorphisme s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & C \\ a + ib & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{array}$$

Chaque élément de C possède un unique antécédent par f. On résume cette propriété en disant que f est une bijection. De plus, f transporte l'addition dans $\mathbb{C}$ sur l'addition dans C et de même avec la multiplication. Ceci se traduit par les formules :

$$f(z + z') = f(z) + f(z')$$
$$f(zz') = f(z)f(z')$$

Exercice 4.1 ☕ Démontrer ces formules.

Pour indiquer que les deux modèles des nombres complexes se correspondent par f, on écrit :

$$(\mathbb{C}, +, \times) \overset{f}{\simeq} (C, +, \times)$$

Il est important de savoir pour quelle structure deux objets mathématiques sont isomorphes. Ici les structures sont les lois d'addition et de multiplication. Prenons un exemple simple qui illustre ce point.

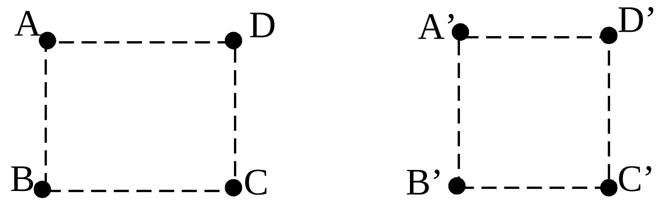

FIGURE 2 – deux ensembles de 4 points dans le plan

Si on considère des ensembles de points dans le plan, on peut ne s'intéresser qu'à leur cardinal. Ainsi les ensembles de la figure 2 seront considérés comme isomorphes tout simplement parce qu'il existe une bijection de l'un sur l'autre, qui consiste à passer du point nommé M au point nommé M'. On dira que ces ensembles ont le même cardinal (en l'occurence, ce cardinal est 4).
Maintenant si l'on s'intéresse aux longueurs des segments joignant deux points consécutifs de chaque figure, on voit tout de suite qu'ils ne sont pas isomorphes pour cette « structure », car les figures n'ont pas tous leurs côtés de même longueur.

Exercice 4.2 ☕☕☕☕☕ Les ensembles suivants ont-ils le même cardinal ? L'ensemble des points de coordonnée entière d'une droite graduée et l'ensemble des points de coordonnée paire de cette même droite ? Deux segments fermés de longueurs différentes ? Un segment et un carré plein ?

5 Conclusion

Les mathématiques telles qu'on les conçoit aujourd'hui ne consistent plus à tirer des conséquences de vérités premières considérées comme évidentes en elles-mêmes, mais plutôt à bâtir des théories à partir d'un jeu d'axiomes, puis de construire des modèles. Dans certains cas il est possible de déterminer tous les modèles d'une même théorie à isomorphisme près. Cela s'appelle une classification. Cette année nous aurons l'occasion de donner la classification des espaces-vectoriels.
Mais pour construire un modèle il faut bien partir de quelque part. Par exemple pour construire un modèle de la théorie des nombres complexes, nous avons utilisé les nombres réels. Mais les nombres réels sont eux-mêmes définis par un jeu d'axiomes (d'ailleurs assez compliqué). Pour en bâtir un modèle on pourraît se baser sur la notion de droite en géométrie euclidienne, mais cette dernière étant définie par un jeu d'axiomes encore plus complexe, ce n'est pas le choix que l'on fait, et on se ramène plutôt aux nombres rationnels, qu'on ramène aux entiers naturels. Peut-on aller encore plus loin et partir d'une théorie encore plus élémentaire ? Il se trouve que oui. Il est possible de bâtir toutes les mathématiques sur la théorie des ensembles. Comme il faut bien partir de quelque part, on admet que cette théorie est cohérente (il est impossible de le démontrer) et que les objets dont elle traite ont bien un sens (savoir s'ils existent est une question plus philosophique que mathématique). À partir de là on construit des modèles pour l'arithmétique, pour les nombres réels, etc… Cette tâche est très longue et nous ne pourrons que l'évoquer cette année, mais nous aurons l'occasion de revenir les notions fondamentales d'ensembles, de bijection, d'isomorphisme et de donner des exemples de différentes structures dans le cadre de ces deux semestres d'algèbre.

6 Solutions des exercices

Solution: 2.1On peut, quitte à diviser par a de chaque côté, supposer que $a = 1$. Une fois ceci fait, la substitution de X par $x + \alpha$ dans l'équation donne, après calcul :

$$x^3 + (3\alpha + b)x^2 + (3\alpha^2 + 2\alpha b + c)x + \alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$$

Il suffit alors de poser $\alpha = -b/3$ pour faire disparaître le terme de degré 2.

Solution: 2.2On a :

$$\begin{cases} z' &= S - z \\ zz' &= P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' &= S - z \\ z^2 - Sz + P &= 0 \end{cases}$$

On constate facilement que si z est une solution de $z^2 - Sz + P = 0$, alors $z' = S - z$ est l'autre solution. D'où le résultat.

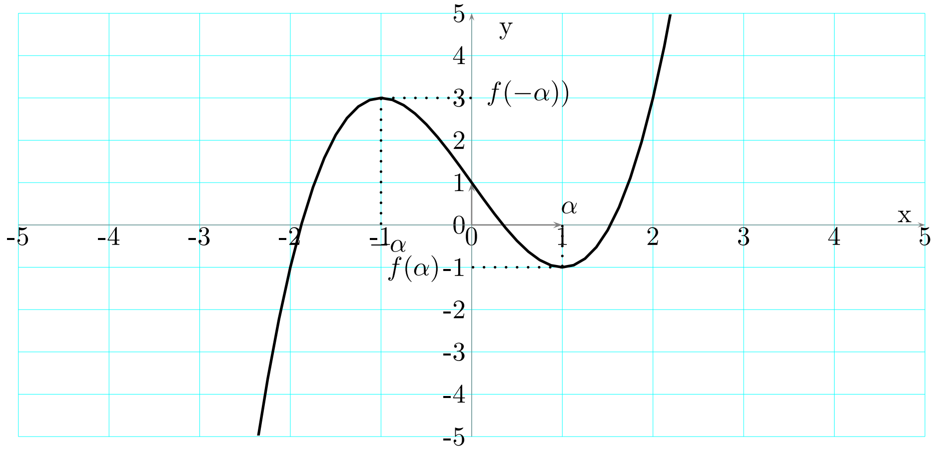

FIGURE 3 – $y = x^3 - 3x + 1$, $\Delta < 0$

Solution: 2.3 et de l'exercice 2.4On pose $f(x) = x^3 + px + q$ et on fait une simple étude de fonction. Comme $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, on voit par continuité de f qu'il existe toujours une solution réelle à l'équation $f(x) = 0$. Pour savoir s'il en existe d'autres, on étudie la monotonie. La dérivée donne :

$$f'(x) = 3x^2 + p$$

1. Si $p > 0$. Alors $\Delta > 0$, et $f'(x) > 0$ pour tout x. La fonction f est donc strictement croissante. Il y a donc une seule solution.
2. Si $p = 0$. Ce cas est similaire : f est strictement croissante, avec une tangente horizontale à l'origine. Il y a une seule racine, qui est triple si $q = 0$ (dans ce cas $\Delta = 0$).
3. Si $p < 0$, on pose $\alpha = \sqrt{-p/3}$. On a alors f strictement croissante sur $]-\infty; -\alpha[$, strictement décroissante sur $]-\alpha; \alpha[$ est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$. On voit facilement que la courbe de f croise une seule fois l'axe des x ssi $f(-\alpha)$ et $f(\alpha)$ sont de même signe. Le calcul donne :

   $$f(-\alpha)f(\alpha) = \Delta$$

   Si $\Delta > 0$ il y a donc une seule solution, et si $\Delta < 0$ il y en a trois (voir figure 3). Dans le cas $\Delta = 0$, il y en a deux, dont l'une est double.

Solution: 4.1 Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On a

$$f(z + z') = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ -b - b' & a + a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = f(z) + f(z')$$

De plus, on a d'une part

$$f(zz') = f(aa - bb' + i(ab' + a'b)) = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + a'b \\ -ab' - a'b & aa' - bb' \end{pmatrix}$$

et d'autre part

$$f(z)f(z') = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -ab' - ba' & bb' + aa' \end{pmatrix}$$

d'où l'égalité cherchée.

Solution: 4.2Il est relativement facile de voir que la réponse est oui aux deux premières questions. Bien que ce soit beaucoup plus difficile à démontrer, la réponse est également oui à la dernière ! Voir les exercices **??** et le problème **??**.